Leçon n° 155 : Exponentielle de matrices. Applications.

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I/ Convergence et propriétés algébriques.

A/ Définition et propriétés générales. [ROM] [CAL]

Proposition 1 : L'exponentielle matricielle est bien définie.

Exemple 2 : Calcul pour A nilpotente.

Exemple 3 : Calcul pour une matrice diagonale.

Proposition 4 : $e^A \in \mathbb{K}[A]$.

Proposition 5 : Si $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, si $A = PBP^{-1}$ alors $e^A = Pe^BP^{-1}$.

Corollaire 6 : $\det(e^A) = e^{\mathrm{Tr}(A)}$ et e^A est inversible avec pour inverse e^{-A}.

Application 7 : Calcul de l'exponentielle matricielle si la matrice est diagonalisable.

Proposition 8 : Si A et B commutent alors $e^{A+B} = e^Ae^B$.

Proposition 9 : $\overline{e^A} = e^{\overline{A}}$.

Proposition 10 : ${}^te^A = e^{{}^tA}$.

Corollaire 11 : Si $A \in S_n(\mathbb{R})$ alors $e^A \in S_n(\mathbb{R})$, si $A \in A_n(\mathbb{R})$ alors $e^A \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.

Proposition 12 : $\exp(A_n(\mathbb{R})) = \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.

B/ De Dunford au calcul d'exp. [ROM] [GRIF] [FGNAlg2]

Théorème 13 : Décomposition de Dunford.

Théorème 14 : Dunford multiplicatif.

Remarque 15 : Lien entre les deux.

Proposition 16 : Décomposition exponentielle de Dunford.

Corollaire 17 : A est diagonalisable si et seulement si e^A est diagonalisable.

Application 18 : $\exp^{-1}(I_n) = \{M \in \mathrm{D}_n(\mathbb{C}),\ \mathrm{Sp}(M) \subset 2i\pi\mathbb{Z}\}$.

Application 19 : Calcul de l'exponentielle de matrice en utilisant la décomposition de Dunford.

II/ Propriétés analytiques de l'exponentielle matricielle.

A/ Différentiabilité. [ROM]

Théorème 20 : exp est C^1 et calcul de sa différentielle.

Proposition 21 : exp est un C^1 difféomorphisme local entre un voisinage de 0 et un voisinage de I_n.

Application 22 : Logarithme matriciel.

B/ Injectivité et surjectivité. [ROM] [ZAV] [CAL]

Proposition 23 : $\exp : \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ n'est ni surjective (car à valeurs dans $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$) ni injective.

Contre-exemple 24 : $R(\theta) = \exp\left(\begin{pmatrix} 0 & \theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}\right)$.

Développement 1

Lemme 25 : $\exp(\mathbb{C}[A]) = \mathbb{C}[A]^\times$.

Proposition 26 : $\exp : \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est surjective.

Contre-exemple 27 : L'exponentielle matricielle complexe n'est pas injective.

Application 28 : $\exp(\mathrm{M}_n(\mathbb{R})) = \{M^2,\ M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\}$.

Application 29 : $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

Application 30 : Si $p \neq 0$ alors $\forall A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, $\exists X \in \mathbb{C}[A]$ tel que $A = X^p$.

Proposition 31 : $\exp : D_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est injective.

C/ Dans $S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $H_n^{++}(\mathbb{C})$. [CAL]

Développement 2

Proposition 32 : $\exp : S_n(\mathbb{R}) \to S_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme.

Proposition 33 : $\exp : H_n(\mathbb{C}) \to H_n^{++}(\mathbb{C})$ est un homéomorphisme.

Corollaire 34 : $S \mapsto \sqrt{S}$ est un homéomorphisme.

Proposition 35 : Décomposition polaire.

Remarque 36 : Dans le cas $n = 1$ on retrouve la décomposition polaire d'un complexe.

Corollaire 37 : $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \overset{\text{homéo}}{\simeq} O_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \overset{\text{homéo}}{\simeq} U_n(\mathbb{C}) \times \mathbb{R}^{n^2}$.

III/ Application aux EDL. [G] [GRIF] [PGCD]

Proposition 38 : $t \mapsto e^{tA}$ est de classe C^∞ et de dérivée $t \mapsto Ae^{tA} = t \mapsto e^{tA}A$.

Proposition 39 : Si $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, $Y' = AY$ a ses solutions maximales définies sur $\mathbb{R}$ et expression solution.

Remarque 40 : On peut toujours se ramener à l'ordre 1.

Théorème 41 : Théorème de stabilité de Liapounov

Références :

— [CAL] Caldéro Histoires Hédonistes tome 1 p. 207-210
— [ROM] Rombaldi Algèbre et géométrie 2nd éd. p. 759-772
— [GRIF] Grifone Algèbre linéaire p. 373-377
— [FGNAlg2] Francinou Gianella Nicolas Algèbre 2 p.247
— [ZAV] Zavidovique Un max de maths p. 48
— [G] Gourdon Analyse p. 360
— [PGCD] Rouvière Petit Guide du Calcul Différentiel p. 130